Arbre de réducteur

Le schéma proposé ci-dessous représente un arbre de réducteur guidé par deux roulements à billes.
Les actions sur les pignons sont définies en B et C par:

$$\{\mathcal{T}_{B(\bar{e}\to e)}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_B & 0 \\ T_B & 0 \end{Bmatrix}_{ds\,R} \qquad \{\mathcal{T}_{C(\bar{e}\to e)}\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_C & 0 \\ T_c & 0 \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

avec une relation entre les composantes R, T et tan α à trouver . (pignons à denture droite)

Hypothèses: les liaisons sont parfaites et sans frottements
le poids des pièces est négligé

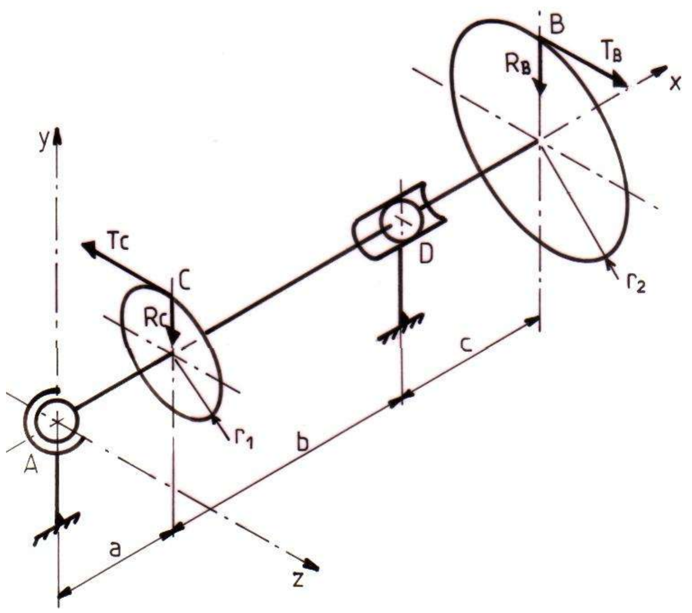
1. D'après le schéma cinématique, déterminer le nom des liaisons ainsi que le torseur des efforts transmissibles en A et D

2. Ecrire en A le principe fondamental de la statique appliqué l'ensemble (arbre + pignons)
On donnera les 6 équations de statique sous forme littérale

3. Application numérique:

   Données: $T_B = 579$ N $\alpha = 20°$
   $r_1 = 17$ mm $r_2 = 38$ mm a = 25 mm b = 50 mm c = 30 mm

   Déterminer: X_A; Y_A; Z_A; Y_D; Z_D; R_B; R_C; T_C



CORRIGE

Nota: les pièces du mécanisme n'étant pas numérotées, le repèrage des actions mécaniques n'est pas des plus rigoureux, mais à peu d'importance car le risque de confusion entre actions est faible !!

1- Etude des liaisons

* En A: liaison rotule de centre A

$$\{\mathcal{T}_{A(\bar{e}\to e)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

* En D: liaison linéaire annulaire d'axe (D,**z**)

$$\{\mathcal{T}_{D(\bar{e}\to e)}\} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

2- On isole l'ensemble (arbre + pignons)

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures: $\{\mathcal{T}_{A(\bar{e}\to e)}\}$; $\{\mathcal{T}_{B(\bar{e}\to e)}\}$; $\{\mathcal{T}_{C(\bar{e}\to e)}\}$; $\{\mathcal{T}_{D(\bar{e}\to e)}\}$

On réduit les actions en A

$$\{\mathcal{T}_{A(\bar{e}\to e)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

* $\mathcal{T}_{B\,(\bar{e}\to e)}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A \vec{B}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_B \vec{B}} + \vec{AB} \wedge \vec{B}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a+b+c) \\ r_2 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R_B \\ T_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_B.r_2 \\ -T_B.(a+b+c) \\ R_B.(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_{B(\bar{e}\to e)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & T_B.r_2 \\ R_B & -T_{B.}(a+b+c) \\ T_B & R_{B.}(a+b+c) \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

* $\mathcal{T}_{D\,(\bar{e}\to e)}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A \vec{D}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_D \vec{D}} + \vec{AD} \wedge \vec{D}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a+b) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ Y_D \\ Z_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -Z_D.(a+b) \\ Y_D.(a+b) \end{vmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_{D(\bar{e}\to e)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_D & -Z_D.(a+b) \\ Z_D & Y_D.(a+b) \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

* $\mathcal{T}_{C\,(\bar{e}\to e)}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A \vec{C}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_C \vec{C}} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{C}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a \\ r_1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ R_C \\ T_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_C . r_1 \\ T_C . a \\ R_C . a \end{vmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_{C(\bar{e}\to e)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & T_C . r_1 \\ R_C & T_C . a \\ T_C & R_C . a \end{Bmatrix}_{ds\,R}$$

$$PFS: \quad \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{T}_{(\bar{e}\to e)}\} = \{\vec{0}\}$$

Equations de résultantes:

sur **x**: $X_A = 0$ (1)

sur **y**: $Y_A + R_B + R_C + Y_D = 0$ (2)

sur **z**: $Z_A + T_B + T_C + Z_D = 0$ (3)

Equations de moments:

sur **x**: $T_B . r_2 + T_C . r_1 = 0$ (4)

sur **y**: $-T_B (a+b+c) - Z_D (a+b) + T_C . a = 0$ (5)

sur **z**: $R_B (a+b+c) + Y_D (a+b) + R_C .a = 0$ (6)

3- Application numérique: (pas de démonstration et chiffres arrondis)

Une équation supplémentaire est nécessaire à la résolution. Elle est donnée par une relation de tangente entre les composantes R et T du type: $R = T \tan \alpha$ (attention aux signes)

(1): $X_A = 0$

(4): $T_C = - 1294$ N

(5): $Z_D = - 379$ N

(3): $Z_A = 1094$ N

(6): $Y_D = 452$ N

(2): $Y_A = 230$ N

$R_C = - 470$ N

$R_B = - 210$ N